Teoria miary
WPPT IIr. semestr zimowy 2009
Wykład 11
Całka Lebesgue'a

19-21/11/09

CAŁKOWANIE FUNKCJI NIEUJEMNYCH

Całkowanie funkcji nieujemnych prostych

Niech $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{A_i}$ będzie funkcją prostą w postaci dowolnej, takiej jednak, że wszytskie a_i są nieujemne. Definiujemy

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i\, \mu(A_i).$$

Trzeba pokazać, że

Fakt 1: Powyższa całka nie zależy od przedstawienia funkcji.

Dowód: Wystarczy pokazać, że wyjdzie ona równa analogicznej całce, gdzie f występuje w formie kanonicznej (gdyż ta forma jest jednoznaczna).

Cała przestrzeń X rozkłada się na rozłączną sumę po $F \subset \{1, 2, \dots, n\}$, zbiorów A_F zadanych poniższym wzorem

$$A_F = \bigcap_{i \in F} A_i \ \cap \ \bigcap_{i \notin F} A_i^c.$$

Rozłączność zbiorów A_F i $A_{F'}$ dla $F \neq F'$ jest niemal oczywista, podobnie jak to, że ich suma daje całą przestrzeń. Na zbiorze A_F funkcja f przyjmuje wartość

$$a_F = \sum_{i \in F} a_i.$$

Zatem f można zapisać w postaci „prawie kanonicznej" (wartości nie muszą być jeszcze parami różne):

$$f = \sum_{F \in \{1,2,\dots,n\}} a_F \mathbf{1}_{A_F}.$$

Aby uzyskać postać kanoniczną trzeba jeszcze pogrupować (wysumować) zbiory A_F takie, że wartości a_F są jednakowe:

$$f = \sum_{j=1}^m \sum_{F: a_F = b_j} a_F \mathbf{1}_{A_F} = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{1}_{B_j},$$

gdzie $b_j, (j = 1, 2, \dots, m)$ są tymi samymi liczbami co wartości a_F, tylko bez powtórzeń, zaś $B_j = \bigcup_{F: a_F = b_j} A_F$. To jest już jednoznaczna (z dokładnością do zmiany numeracji składników) kanoniczna postać funkcji prostej f.

Teraz musimy pokazać, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i) = \sum_{j=1}^{m} b_j\, \mu(B_j).$$

Zbiór A_1 można zapisać jako rozłączną sumę wszystkich A_F takich, że $1 \in F$. Zatem pierwszy człon sumy po lewej stronie zapiszemy jako

$$a_1\, \mu(A_1) = a_1 \mu(\bigcup_{F \ni 1} A_F) = a_1 \sum_{F \ni 1} \mu(A_F).$$

Postępując podobnie z kolejnymi członami dostaniemy

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{F \ni i} \mu(A_F) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{F \ni i} a_i\, \mu(A_F).$$

Zmieniając kolejność sumowania, musimy najpierw sumować po wszystkich F, a potem, przy ustalonym F, tylko po takich i, że $F \ni i$, czyli po prostu po $i \in F$. Zatem ostatnia suma zapisze się tak:

$$\sum_{F \subset \{1,2,\ldots,n\}} \sum_{i \in F} a_i\, \mu(A_F) = \sum_{F \subset \{1,2,\ldots,n\}} \mu(A_F) \sum_{i \in F} a_i = \sum_{F \subset \{1,2,\ldots,n\}} \mu(A_F)\, a_F.$$

To już prawie koniec. Teraz trzeba pogrupować zbiory F według wartości a_F (znów posługując się liczbami b_j). Wtedy ostatnia suma zamieni się tak:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{F : a_F = b_j} a_F\, \mu(A_F) = \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{F : a_F = b_j} \mu(A_F) = \sum_{j=1}^{m} b_j\, \mu(B_j),$$

gdzie w ostatnim przejściu skorzystaliśmy z tego, że B_j jest sumą rozłączną zbiorów A_F po F takich, że $a_F = b_j$. I to trzeba było pokazać. $\square$

Teraz, dla funkcji nieujemnych prostych pokazuje się następujące fakty:

Fakt 2: Całka jest niemalejąca i liniowa (przy nieujemnych współczynnikach), czyli
1) $f \geq g \implies \int f\, d\mu \geq \int g\, d\mu$,
2) $\int (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu \quad (\alpha, \beta \geq 0)$.

Dowód: Niech $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mathbf{1}_{A_i}$ i $g = \sum_{j=1}^{n} b_j\, \mathbf{1}_{B_j}$ będą zapisami kanonicznymi. Można rozdrobinić zbiory A_i i B_j na ich wzajemne przekroje:

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} A_i \cap B_j, \quad B_j = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap B_j.$$

Zatem

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{m} \mu(A_i \cap B_j) = \sum_{i,j} a_i\, \mu(A_i \cap B_j),$$

i podobnie

$$\int g\,d\mu = \sum_{i,j} b_j\,\mu(A_i \cap B_j).$$

W obu przypadkach można w sumie podwójnej pominąć te pary indeksów (i, j), dla których $\mu(A_i \cap B_j) = 0$, w szczególności można pominąć pary dla których przekrój $A_i \cap B_j$ jest pusty.

Teraz zauważmy, że skoro funkcje były w postaci kanonicznej, to na całym zbiorze A_i funkcja f jest stale równa a_i (bo funkcje charakterystyczne innych $A_{i'}$ są tam zerami), podobnie na B_j, $g = b_j$. Rozważmy niepusty przekrój $A_i \cap B_j$. Mamy tam punkt x w którym $f(x) = a_i$ i $g(x) = b_j$. Ponieważ $f \geq g$ w każdym punkcie, więc $a_i \geq b_j$. Stąd suma reprezentująca całkę z f jest $\geq$ od sumy reprezentującej całkę z g. Koniec dowodu monotoniczności.

Teraz liniowość: Niech f i g będą przedstawione jak poprzednio. Niech α i β będą nieujemne. Mamy

$$\alpha f + \beta g = \alpha \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mathbf{1}_{A_i} + \beta \sum_{j=1}^{m} b_j\,\mathbf{1}_{B_j} = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i\,\mathbf{1}_{A_i} + \sum_{j=1}^{m} \beta b_j\,\mathbf{1}_{B_j}.$$

Jest to jakieś (w postaci dowolnej) przedstawienie funkcji $\alpha f + \beta g$ jako funkcji prostej. Współczynnikami są tu $n + m$ liczb: αa_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i dalej βb_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, na $n+m$ zbiorach A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ i B_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Ponieważ całkę możemy liczyć z dowolnego przedstawienia funkcji (o ile współczynniki są nieujemne, a tu tak jest), to

$$\int \alpha f + \beta g\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha a_i\,\mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta b_j\,\mu(B_j).$$

Teraz trzeba znów wyłączyć α z pierwszej sumy i β z drugiej i wyjdzie, że ta całka jest równa $\alpha \int f\,d\mu + \beta \int g\,d\nu$. $\square$

Całkowanie funkcji nieujemnych mierzalnych

Dla funkcji nieujemnej mierzalnej f definiujemy

$$\int f\,d\mu = \sup\left\{ \int f_p\,d\mu : 0 \leq f_p \leq f, f_p \text{ jest funkcją prostą mierzalną} \right\}.$$

Widomo nam, że każda ograniczona z dołu funkcja mieralna jest granicą (w każdym punkcie) niemalejącego ciągu funkcji prostych mierzalnych f_n. W szczególności jest tak dla funkcji nieujemnej (bo jest ograniczona z dołu) i dodatkowo można wszystkie funkcje proste f_n wziąć nieujemne. Wtedy prawdziwy jest wzór:

Fakt 3:

$$\int f\,d\mu = \lim_n \uparrow \int f_n\,d\mu.$$

Dowód. Oczywiscie granica po prawej jest supremum po rodzinie zawartej w rodzinie występującj w definicji całki, więc prawa strona jest nie większa od lewej.

Weźmy dowolną niezerową nieujemną funkcję prostą mierzalną $f_p \leq f$. Rozważymy dwa przypadki: 1) całka z f_p jest nieskończona i 2) całka z f_p jest skończona. W przypadku nieskończonym całka z f jest też nieskończona i trzeba, dla dowolnego $M > 0$ wskazać funkcję f_n w naszym ciągu, o całce przekraczającej M. W przypadku skończonym trzeba dla dowolnego $\epsilon > 0$ wskazać funkcję f_n w naszym ciągu, o całce przekraczającej $\int f_p \, d\mu - \epsilon$. Zaczynamy od przypadku nieskończonego. Skoro całka z f_p jest nieskończona i jako funkcja prosta przyjmuje ona skończenie wiele wartości, to jedna z tych wartości, powiedzmy $a > 0$ musi być przyjęta na zbiorze A o mierze nieskończonej. W każdym punkcie zbioru A istnieje n_x powyżej którego $f_n(x) > \frac{a}{2}$ (bo $f_n(x) \to f(x) \geq f_p(x) = a$). Zbiory $A_n = \{x : n_x = n\}$ wstępują i ich sumą jest A. Zatem, z ciągłości miary z dołu, $\mu(A_n) \to \infty$. Weźmy n takie, że $\mu(A_n) > \frac{2M}{a}$. Ponieważ na A_n mamy $f_n > \frac{a}{2}$, to $f_n \geq \frac{a}{2}\mathbf{1}_{A_n}$, zatem z monotoniczności całki na funkcjach prostych, $\int f_n \, d\mu \geq \mu(A_n)\frac{a}{2} = M$.

Teraz przypadek skończony. Tym razem jest odwrotnie: ponieważ całka z f_p jest skończona, to zbiór A na którym f_p przyjmuje wartości dodatnie (a jest ich skończenie wiele i ich minimum a jest dodatnie) ma miarę skończoną. Dodatkowo przez b oznaczmy największą wartość funkcji f_p (b jest nieujemne skończone). Ustalmy δ mniejsze od trzech liczb: a, $\frac{\epsilon}{2\mu(A)}$ i $\frac{\epsilon}{2b}$. Ponieważ $f_n \to f$ wszędzie a zatem i prawie wszędzie, to na zbiorze A miary skończonej jest to zbieżność według miary. Zatem istnieje n takie, że $\mu(\{x \in A : f_n(x) < f(x) - \delta\}) < \delta$. Zbiór w środku oznaczmy przez B. Na dopełnieniu B (do zbioru A) mamy $f_n(x) > f(x) - \delta \geq f_p - \delta$. Można to zapisać tak:

$$f_n \geq \mathbf{1}_{A \setminus B}(f_p - \delta) = f_p'.$$

Zauważmy, że f_p' jest wciąż nieujemną funkcją prostą (bo $\delta < a$ więc odejmując δ na podzbiorze zbioru A nie zejdziemy poniżej zera). Do funkcji f_p brakuje jej: wartości δ na zbiorze $A \setminus B$ oraz pełnej wartości funkcji f_p na zbiorze B. Czyli można to zapisać tak:

$$f_p = f_p' + \delta\,\mathbf{1}_{A \setminus B} + \mathbf{1}_B f_p \leq f_p' + \delta\,\mathbf{1}_{A \setminus B} + b\,\mathbf{1}_B.$$

Są to operacje liniowe i nierówności na nieujemnych funkcjach prostych, więc z monotoniczności i liniowości całki na takich funkcjach mamy

$$\int f_p \, d\mu \leq \int f_p' \, d\mu + \delta\,\mu(A \setminus B) + b\,\mu(B) \leq \int f_p' \, d\mu + \delta\mu(A) + b\delta \leq \int f_p' \, d\mu + \epsilon.$$

Jeszcze raz z monotoniczności całki na funkcjach prostych mamy też

$$\int f_n \, d\mu \geq \int f_p \, d\mu \geq \int f \, d\mu - \epsilon.$$

Koniec dowodu. $\square$

Teraz udowodnimy analogiczne własności dla funkcji nieujemnych, jak dla funkcji prostych:

Fakt 4: Całka jest na funkcjach nieujemnych mierzelnych niemalejąca i liniowa (przy nieujemnych współczynnikach), czyli
1) $f \geq g \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \int f\, d\mu \geq \int g\, d\mu$,
2) $\int(\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu \quad (\alpha, \beta \geq 0)$.

Dowód: Jeśli $f \geq g \geq 0$ to rodzina funkcji prostych w definicji całki z f zawiera analogiczną rodzinę dla g, zatem całka z f jest nie mniejsza niż z g.

Teraz liniowość: Ustalmy f, g, α i β. Skorzystamy z Faktu 3. Niech f_n zbiega do f i g_n zbiega do g (niemalejące ciągi funkcji prostych). Wtedy ciąg $\alpha f_n + \beta g_n$ jest ciągiem niemalejącym funkcji prostych zbieżnych do $\alpha f + \beta g$. Z liniowści granicy dostajemy tezę.

CAŁKOWANIE FUNKCJI ZNAKOWANYCH

Zacznijmy od rozkładu funkcji dowolnej f na tzw. *część nieujemną* i *część niedodatnią*. Wbrew nazwie, obie te funkcje są nieujemne. Oto jak są one zdefiniowane:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) : & f(x) \geq 0 \\ 0 : & f(x) \leq 0 \end{cases}$$
$$f^-(x) = \begin{cases} 0 : & f(x) \geq 0 \\ -f(x) : & f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Alternatywne wzory to

$$f^+(x) = \frac{|f| + f}{2}$$
$$f^-(x) = \frac{|f| - f}{2}$$

Jak łatwo sprawdzić, mamy wzór $f = f^+ - f^-$. Jest elementarne, że f jest mierzalna wtedy i tylko wtedy gdy obie funkcje f^+ i f^- są mierzalne. Funkcję f możne przedstwić jako różnicę dwóch funkcji nieujemnych na wiele spodobów, jednak rozkład na f^+ i f^- jest w pewnym sensie ,,najmniejszy". Opisuje to poniższy lemat:

Lemat: Jeśli $f = g - h$, gdzie g i h są nieujemne, to

$$g \geq f^+, \quad h \geq f^- \quad \text{oraz} \quad g - f^+ = h - f^-.$$

Dowód: Ustalmy w dziedzinie punkt x. Jeśli $f(x) \geq 0$ to $f^+(x) = f(x) = g(x) - h(x) \leq g(x)$. Jeśli $f(x) < 0$ to $f^+(x) = 0$ i wtedy oczywiście $f^+(x) \leq g(x)$. W obu przypadkach $g(x) \geq f^+(x)$. Oznaczmy $j = g - f^+$. (Wiemy już że jest to funkcja nieujemna.) Wtedy

$$f^+ - f^- = f = g - h = f^+ + j - h, \quad \text{stąd} \quad -f^- = j - h \quad \text{czyli} \quad h - f^- = j,$$

a to mieliśmy udowodnić. $\square$

Możemy teraz zdefiniować całkę z f:

Definicja:

$$\int f\, d\mu = \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu,$$

O ILE nie jest to wyrażenie nieoznaczone $\infty - \infty$. Jeśli wychodzi takie wyrażenie, to mówimy, że f jest *niecałkowalna nawet w sensie niewłaściwym* i po prostu umawiamy się , że z takiej funkcji całki się policzyć nie da.

Udowodnimy teraz te same własności co poprzednio (liniowość i monotoniczność) dla całek z funkcji dowolnych mierzalnych.

Fakt 5 Dla dowolnych funkcji f i g całkowalnych (w sensie być może niewłaściwym) oraz współczynników rzeczywistych α i β zachodzi

$$\int \alpha f + \beta g\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu + \beta \int g\, d\mu,$$

o ile po prawej stronie nie pojawia sie symbol nieoznaczony $\infty - \infty$.

Dowód: Ponieważ w podanej wersji dowód wymaga rozpatrywania wielu przypadków w zależności od znaków współczynników α i β, my postąpimy inaczej, dowodząc liniowości poprzez sprawdzenie dwóch wzorów:

$$\int \alpha f\, d\mu = \alpha \int f\, d\mu, \quad \text{oraz} \quad \int f + g\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu.$$

Pierwsza część jest łatwa: jeśli $\alpha > 0$, to po prostu $(\alpha f)^+ = \alpha f^+$ oraz $(\alpha f)^- = \alpha f^-$ i wtedy

$$\int \alpha f\, d\mu = \int (\alpha f)^+\, d\mu - \int (\alpha f)^-\, d\mu = \int \alpha f^+\, d\mu - \int \alpha f^-\, d\mu.$$

Z obu ostatnich całek można wyciągnąć α – tu korzystamy z liniowści całki dla funkcji nieujemnych i nieujemnego α. Następnie to α można zwyczajnie wyłączyć przed nawias. Wyjdzie $\alpha(\int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu)$, a to się równa z definicji $\alpha \int f\, d\mu$.

Gdy $\alpha < 0$ to łatwo sprawdzić, że wyjdzie ,,na krzyż z minusem": $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ oraz $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$. Pozostała część rachunków przebiegnie tak:

$$\int \alpha f\, d\mu = \int (\alpha f)^+\, d\mu - \int (\alpha f)^-\, d\mu = \int (-\alpha f^-)\, d\mu - \int (-\alpha f^+)\, d\mu.$$

Teraz $-\alpha$ jest nieujemnmym współczynnikiem, więc można go wyłączać, w wyniku czego dostaniemy $-\alpha(\int f^-\, d\mu - \int f^+\, d\mu)$, a to się równa z definicji $-\alpha \cdot (-\int f\, d\mu)$, czyli znowu $\alpha \int f\, d\mu$.

Teraz zabieramy się za całkę z sumy. Najpierw załóżmy, że obie całki $\int f\, d\mu$ i $\int g\, d\mu$ są skończone. To znaczy wszystkie cztery całki $\int f^+\, d\mu$, $\int f^-\, d\mu$ i $\int g^+\, d\mu$, $\int g^-\, d\mu$ są skończone. Wtedy mamy

$$f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

Jest to (jakiś) rozkład funkcji $f+g$ na różnicę funkcji nieujemnych. Z lematu istnieje funkcja nieujemna j taka że

$$f^+ + g^+ = (f+g)^+ + j \qquad \text{oraz} \qquad f^- + g^- = (f+g)^- + j.$$

Zauważmy, że $j \le f^+ + g^+$ a zatem jej całka jest skończona. Teraz wystarczy napisać

$$\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = \int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu + \int g^+\,d\mu - \int g^-\,d\mu =$$
$$\left(\int f^+\,d\mu + \int g^+\,d\mu\right) - \left(\int f^-\,d\mu + \int g^-\,d\mu\right) = ...$$

W nawiasach mamy sumy funkcji nieujemnych, a więc możemy skorzystać z liniowości całki w takich przypadkach. A zatem kontynuujemy (poniżej drugi raz skorzystamy z takiej liniowości)

$$\int f^+ + g^+\,d\mu - \int f^- + g^-\,d\mu = \int (f+g)^+ + j\ d\mu - \int (f+g)^- + j\ d\mu =$$
$$= \int (f+g)^+\,d\mu + \int j\,d\mu - \int (f+g)^-\,d\mu - \int j\,d\mu = ...$$

Ponieważ całka z j jest skończona, można ją skrócić i wtedy dostajemy

$$= \int (f+g)^+\,d\mu - \int (f+g)^-\,d\mu,$$

a to jest z definicji całka z funkcji $f+g$. I o to chodziło.

Teraz rozprawimy się z przypadkiem, gdy jedna lub kilka z czterech całek $\int f^+\,d\mu$, $\int f^-\,d\mu$ i $\int g^+\,d\mu$, $\int g^-\,d\mu$ jest (są) nieskończone. Aby była całkowalność obu funkcji f i g może to być co najwyżej jedna całka z literką f i jedna z literką g. Odpada też przypadek, gdy nieskończona jest jednocześnie całka z f^+ i g^- albo jednocześnie całka z f^- i g^+ (gdyż wtedy po prawej stronie w tezie dowodzonego faktu wychodziłoby $\infty - \infty$). Zatem został przypadek, gdy jest albo tylko jedna całka nieskończona, albo dwie, ale wtedy dotyczą one funkcji z tym samym ,,znaczkiem'' $^+$ lub $^-$. Przypuśćmy, że jest to jedna lub obie całki z funkcji ,,z minusikiem''.

Wtedy $\int f\,d\mu + \int g\,d\mu = -\infty$ (bo tyle wynosi jedna lub obie całki składowe). Z drugiej strony równania, które mamy sprawdzić mamy $\int f+g\,d\mu$, a to jest z definicji

$$\int (f+g)^+\,d\mu - \int (f+g)^-\,d\mu$$

i mamy wykazać, że to też jest $-\infty$. Pokazaliśmy już, że $(f+g)^+$ jest mniejsza równa od $f^+ + g^+$, o której wiemy, że ma całkę skończoną (bo oba składniki mają). Zatem pierwsza całka jest skończona. Trzeba pokazać, że druga całka (bez minusa) jest nieskończona. Pamiętamy z lematu, że $f^- + g^- = (f+g)^- + j$, gdzie $j = f^+ + g^+ - (f+g)^+$ jest funkcją nieujemną. Funkcja j, jako mniejsza równa od funkcji $f^+ + g^+$ o całce skończonej, też ma całkę skończoną. Z liniowości całki dla funkcji nieujemnych, mamy

$$\infty = \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu = \int f^- + g^- \, d\mu = \int (f+g)^- + j \, d\mu = \int (f+g)^- \, d\mu + \int j \, d\mu.$$

Ponieważ ostatnia całeczka jest, jak pokazaliśmy, skończona, to przedostatnia całka musi być nieskończona, a to usiłowaliśmy wykazać. To kończy dowód.

Przypadek, gdy nieskończona jest jedna lub obie całki ,,z plusikiem" dowodzi się identycznie (symetrycznie). $\Box$

Ostatni fakt na dziś to monotoniczność całki w ogólnym przypadku.

Fakt 6: Jeśli $f \geq g$ i całki z obu funkcji mają sens, to $\int f \, d\mu \geq \int g \, d\mu$.

Dowód: Jeśli obie całki są nieskończone, lub obie minus nieskończone, to zachodzi równość, czyli i nierówność. W każdym innym przypadku w wyrażeniu

$$\int f \, d\mu - \int g \, d\mu$$

nie wyjdzie symbol niezonaczony $\infty - \infty$. Zatem z poprzedniego twierdzenia jest liniowść całki:

$$\int f \, d\mu - \int g \, d\mu = \int f - g \, d\mu.$$

Z założenia $f \geq g$ po prawej stronie mamy teraz pod całką funkcję nieujemną, a więc i całka jest nieujemna. Czyli całka z f jest $\geq$ od całki z g. $\Box$